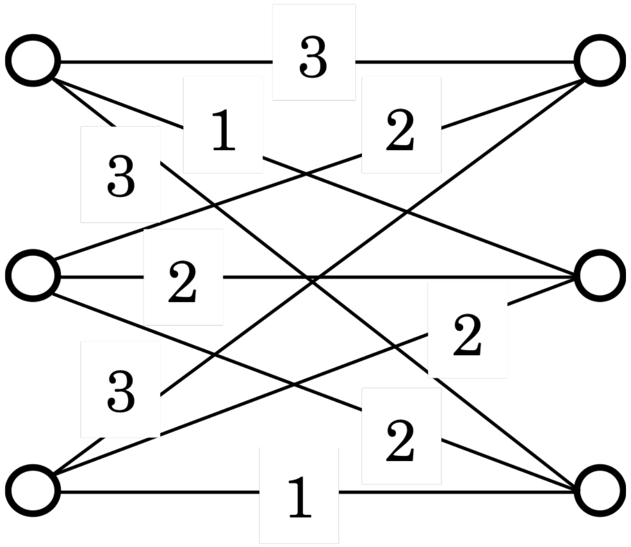
課題設定

問題

完全2部グラフ(complete bipartite graph)$G=(S,T;E)$と枝の非負のコスト $c\colon E\to\mathbb{R}_{\geq 0}$が与えられた時に,
最小コストを達成する完全マッチング(perfect matching)を求める

定義

- 関数 $y:(S\cup T)\to\mathbb{R}$ が $y(i)+y(j)\leq c(i,j)$
  を満たす時potentialと呼ぶ. またyのvalueを $\displaystyle\sum_{v\in S\cup T} y(v)$と定義する
  任意のpotentialのvalueは任意の完全マッチングのコスト以下
  になっていることは容易に分かる
- 枝 (i,j) が $y(i)+y(j)=c(i,j)$
  を満たす時tight edgeと呼ぶ



方針

tight edgeのみから構成される完全マッチングを求めることを目指す.その時,完全マッチングの
コストはpotentialのvalueと一致するので最小コストを達成する完全マッチングであることが分かる.

アルゴリズム

Algorithm 1: Hungarian Algorithm

Input: A complete bipartite graph $G=(S,T;E)$ with nonnegative cost $c: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Output: The perfect matching M with a minimum total cost

`// Initialization`

$y(s) \leftarrow 0 \quad \forall s \in Z \cap S$

All edges are oriented from S to T

while $|M| < |S|$ **do**

  if $R_T \cap Z \neq \emptyset$ **then**

    `// operation1`

    reverse the orientation of a directed path consisting of only tight edges from R_S to R_T

  else

    `// operation2`

    $\triangle \equiv \min\{c(i,j) - y(i) - y(j) \mid i \in Z \cap S, j \in T \setminus Z\}$

    $y(s) \leftarrow y(s) + \triangle \quad \forall s \in Z \cap S$

    $y(t) \leftarrow y(t) - \triangle \quad \forall t \in Z \cap T$

return M

定義

- 関数 $y:(S\cup T)\to\mathbb{R}$ が $y(i)+y(j)\leq c(i,j)$ を満たす時potentialと呼ぶ
- 枝 (i,j) が $y(i)+y(j)=c(i,j)$ を満たす時tight edgeと呼ぶ
- potential yを伴ったグラフをG_yと表し, G_yのorientationを$\overrightarrow{\mathrm{G}_y}$の表す
- $\overrightarrow{\mathrm{G}_y}$上のTから Sの集合を$M$と表す
  (Mは常にマッチングとなる)
- $\mathrm{R_S} \subset S$, $\mathrm{R_T} \subset T$ をMに含まれていない頂点とする
- $\mathrm{Z} \subset S \cup T$を $\overrightarrow{\mathrm{G}_y}$上で $\mathrm{R_S}$ からtight edgeのみを通って到達可能な頂点集合とする

アルゴリズム実装例

アルゴリズムの保存条件や詳細な証明は以下

https://akirat1993.github.io/MathPC/md/math/hungarian/hungarian.html